

PARTIEL DE PHYSIQUE ATOMIQUE ET SUBATOMIQUE  
TOUT DOCUMENT INTERDIT –DUREE 1H30 (CORRECTION JPC)

QUESTIONS DE COURS (6.5 PTS):

- a) Donner le principe du modèle de Bohr pour un atome hydrogénoïde. Montrer que la quantification du moment cinétique implique nécessairement une quantification du rayon classique de l'électron et de sa vitesse.

Correction (1.5 pts) :

La quantification du moment cinétique conduit à :

$$m^2 r^2 v^2 = n^2 \hbar^2 \quad (1)$$

Dans le cadre du modèle de Bohr, l'énergie cinétique de l'électron est égale à 1/2 de l'énergie potentielle soit :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = Z e^2 / (2r) \quad \text{avec } e^2 = e^2 / 4\pi\epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow m r v^2 = Z e^2$$

D'où nous tirons d'après (1):

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m Z e^2} \Rightarrow \text{quantifié}$$

Et puisque  $m r_n v_n = n \hbar$

$$v_n = \frac{Z e^2}{n \hbar} \Rightarrow \text{quantifié}$$

- b) Donner l'expression de l'énergie  $E_n$  de l'électron dans le cadre du modèle de Bohr. Quelle est la valeur de l'énergie d'ionisation d'un atome.

Correction (0.5 pts):

$$E_n = - \frac{13.6 Z^2}{n^2}$$

L'énergie d'ionisation est donc égale à  $+13.6 Z^2 eV = -E_1 + E_{n \rightarrow \infty}$

- c) Peut-on relier cette énergie d'ionisation à l'énergie au repos de l'électron ? Si oui, à quelle fraction de l'énergie de masse de l'électron cette énergie d'ionisation correspond-elle ? Comment s'appelle la constante de proportionnalité ?

Correction (0.5pts):

Oui,  $E_n = - \frac{(\frac{1}{2}) m_e c^2 \alpha^2 Z^2}{n^2}$  cette fraction est donc égale à  $\alpha^2/2 = 1/2 * 137^2$ . Où  $\alpha$  est la constante de structure fine.

- d) Définir les dégénérescences accidentelle et essentielle.

Correction (1 pt): voir cours

- e) Définir physiquement le couplage LS en terme d'interaction. Les vecteurs  $l_n$ ,  $L$ ,  $S$  sont-ils des vecteurs propres de l'Hamiltonien de structure fine ? Quel nouveau nombre quantique faut-il introduire pour tenir compte du couplage ? L'exprimer en fonction de L et de S.

Correction (1 pt):

- Le couplage LS résulte physiquement de l'interaction du moment cinétique de l'électron et de son moment de spin. Seul le moment total  $J=L+S$  est une constante du mouvement, il peut donc y avoir transfert de moment entre le spin et le moment cinétique orbital.
- Non, L et S ne sont plus de bon nombre quantique et les vecteurs  $\{L, S, J\}$  ne sont pas vecteurs propres du Hamiltonien SPIN-ORBIT.
- Le nouveau nombre quantique est donc J, le moment total :  $J=L+S$

f) Ecrire les vecteurs de bases  $\{|n, L, S, J\rangle\}$  associés à la configuration 3d ?

Correction (1 pt):  $|n=3, L=2, S=1/2, J=\{3/2 ; 5/2\}\rangle$

g) Les corrections de structure fine sont-elles issues de la prise en compte du spin de l'électron, de celui du noyau ou des effets relativistes liés à la « vitesse » de l'électron ?

Correction (0.5 pt):

Structure fine = prise en compte des effets relativistes liés à la vitesse classique de l'électron qui n'est pas négligeable devant la vitesse de la lumière. Prise en compte également du spin de l'électron mais pas du noyau.

h) En couplage spin-orbite, donner la relation vectorielle entre moment magnétique et cinétique de l'électron.

Correction (0.5 pt):

$$\vec{M}_S = \frac{g_e \mu_B \vec{S}}{\hbar};$$
$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{L} + \frac{\hbar}{g_e \mu_B} \vec{M}_S$$

**EXERCICE I : SPECTRE D'EMISSION DE L'HYDROGENE (MODELE DE BOHR)**  
**(8 PTS)**

L'analyse spectrale du rayonnement solaire (et de nombreuses étoiles) présente des trous ou raies d'absorption. Ces raies ont des longueurs d'onde bien particulières qui sont données dans le tableau suivant:

Série 1 (nm)	Série 2 (nm)	Série 3 (nm)
n = 1	n = 1	n = 2
121.56	13.507	164.117
102.572	11.397	121.566
97.253	10.806	108.543
94.974	10.552	102.573
93.780	10.421	99.281
91.2	10.130	91.176

a) Quelle est la relation entre la longueur d'onde d'un rayonnement et son énergie? Montrer alors que cette dernière est donnée par  $E \text{ (eV)} \sim 1240 / \lambda \text{ (nm)}$ .

Correction (1.5 PT):

$$E = \frac{hc}{\lambda} \text{ avec } E \text{ en joule (1eV} \rightarrow 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J)}; h=6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}; c=3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{d'ou: } E \text{ (eV)} = \frac{(10^{19} * 6.62 \cdot 10^{-34} * 310^8 * 10^9)}{1.6 * \lambda \text{ (nm)}} = \frac{1241.25}{\lambda \text{ (nm)}}$$

- b) Expliquer le principe d'émission et d'absorption d'un rayonnement électromagnétique par un atome, où  $n$  sera le nombre quantique initial et  $n'$  celui de l'état final.  
**Correction (1PT):** L'absorption ou l'émission d'un photon provoque le changement d'état quantique de l'électron. Par absorption, celui passe du niveau d'énergie associé à l'état initial de nombre quantique principal  $n$  au niveau d'énergie plus élevé de nombre quantique principal  $n'$ . L'émission spontanée est l'opération inverse, l'électron « passe » d'un état excité défini par le nombre quantique  $n$  à un état de plus basse énergie défini par le nombre quantique  $n'$ . L'excédent d'énergie est émis sous la forme d'un rayonnement électromagnétique.
- c) Donner l'expression de l'énergie du rayonnement émis en fonction de  $n$  et  $n'$  pour un atome hydrogénoïde de numéro atomique  $Z$ .  
**Correction (1 PT):**  $E(n',n) = -13,6Z^2 \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) > 0$  car  $n(\text{initial}) > n'(\text{final})$ .
- d) Le modèle de Bohr permet-t-il de justifier les valeurs du tableau?  
**Correction (3 PTS):** Oui en appliquant la formule (Qc) établie dans le cadre du modèle de Bohr et la formule (Qa) nous obtenons les séries du tableau. Par exemple pour l'hydrogène  
Série 1 :  $Z=1$ ,  $E(2,1) = -13,6(1/4-1) = 10,2\text{eV}$  soit d'après (Qa)  $1240/10,2 = 121,56\text{ nm} \dots$   
Série 2 :  $Z=3$ ,  $E(2,1) = -13,6*9*(1/4-1) = 91,8\text{eV}$  soit d'après (Qa)  $1240/91,8 = 13,50\text{ nm}$   
Série 3 :  $Z=2$ ,  $E(3,2) = -13,6*4*(1/9-1/4) = 7,55\text{eV}$  soit (Qa)  $1240/7,55 = 164,11\text{ nm}$
- e) Quels sont les atomes responsables des raies d'absorption observées? Est-ce compatible avec ce que vous savez de la composition du soleil?  
**Correction (1 PT):** Il s'agit donc pour la série 1 de l'hydrogène ( $Z=1$  transition  $n=1$  à  $n'=2,3,4,5,6$ ), pour la série 2 du lithium ( $Z=3$  transition  $n=1$  à  $n'=2,3,4,5,6$ ) et pour la série trois de l'hélium ( $Z=2$  mais  $n=2$  à  $n'=3,4,5,6,7$ ). Le Soleil est constitué principalement d'hydrogène, l'hélium et le lithium sont produits par fusion nucléaire.
- f) A quel processus physique correspond la dernière ligne du tableau pour les séries 1 et 2? **Correction (0.5 PT):** A l'énergie d'ionisation des éléments ...

Exercice II

$$H_{\text{eff}} = \frac{A}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 ; \quad A = 1,27 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 |S, \eta\rangle &= \hbar^2 S(S+1) |S, \eta\rangle \\ \hat{S}_z |S, \eta\rangle &= \hbar \eta |S, \eta\rangle \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{S}^2 |S, \eta\rangle \\ \hat{S}_z |S, \eta\rangle \end{aligned}} \right\} \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

a)  $H_{\text{eff}} = \frac{A}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 ; \quad \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$

$$H_{\text{eff}} |S, \eta\rangle = \frac{A}{2} [S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)] |S, \eta\rangle$$

observables qui sous-entendent  $|S_1, S_2, S, \eta\rangle = |S, \eta\rangle$   
 $\Rightarrow H_{\text{eff}}$  diagonale

Valeurs propres  $\Delta E_{\text{eff}} = \frac{A}{2} [S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)]$

b) 1s positonium  $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$   $S_1$  spin de  $l'e^-$   
 $S_2$  ———  $l'e^+$

$$|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2 \Rightarrow S = 0, 1$$

•  $S=0 \Rightarrow \Delta E_{\text{eff}} = \frac{A}{2} \left[ 0 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] = -\frac{3A}{4}$

AN:  $\Delta E_{\text{eff}} = -5,95 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$

•  $S=1 \Rightarrow \Delta E_{\text{eff}} = \frac{A}{2} \left[ 1 \times (1+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{A}{4}$

AN:  $\Delta E_{\text{eff}} = +1,98 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$

